b. Soit f une fonction de E.

Montrer que la fonction $g=\frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$, où a et b sont deux réels.

c. Déterminer alors E.

9 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t.

La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction.

On a constaté que : $y'(t)=ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.

On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t=0$.

1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y'=ky$ telle que $y(0)=N$.

2. Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N, le nombre de microbes au bout de trois heures.

3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ?

10 L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\sin x$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.(l'unité graphique étant 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Calculer f' et vérifier que $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0,2\pi]$ l'inéquation $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

En déduire le signe de f' sur $[0,2\pi]$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,2\pi]$.

Préciser les tangentes à C aux deux extrémités de l'intervalle.

2. On note C_1 et C_2 les représentations graphiques des deux fonctions $x\mapsto e^{-x}$ et $x\mapsto -e^{-x}$.

a. Donner les abscisses, dans $[0,2\pi]$, des points où C rencontre C_1 et C_2.

b. Vérifier qu'en chacun des points communs précédents, les courbes C et C_1 d'une part, C et C_2 d'autre part, ont même tangente.

3. a) Vérifier que $f''+2f'+2f=0$.

b. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$.

11 Soit l'équation différentielle $(E): y'+2y=x^2$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'+2y=0$.

2. Déterminer un trinôme du second degré qui vérifie (E).

3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f-g$ est une solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

12 Soit l'équation différentielle $(E): y'-y=4\cos x$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'-y=0$.

2. Déterminer les nombres a et b tels que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=a\cos x+b\sin x$, vérifie (E).

3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f-g$ est une solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

13 Dans un circuit contenant un générateur de force électromotrice E ainsi qu'une bobine de résistance r (en ohms) et d'inductance L (en henrys), on montre que l'intensité est une fonction du temps solution de l'équation différentielle $Ly'+ry=E$.

On prend $E=10v$, $r=100\Omega$ et $L=0.2H$.

A l'instant 0, l'intensité est nulle dans le circuit.

1. Déterminer la fonction $i: t\mapsto i(t)$ décrivant l'évolution de l'intensité i en fonction du temps.

2. Déterminer la limite de i quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.